Université Claude Bernard - ENS Lyon
Groupe de travail : Bloch's lectures on algebraic cycles

THÉORÈME DE ROJTMAN II

F. DÉGLISE

Table des matières

1. Fin de la preuve suivant Bloch

On rappelle que l'on cherche à prouver :

Théorème 1.1. *Soit X un schéma projectif lisse sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p.*

Alors, le morphisme canonique

$$\Theta_X : A_0(X) \to \mathrm{Alb}(X)$$

induit un isomorphisme sur les sous-groupes de torsion première à p.

On a réduit ce théorème dans l'exposé précédent au théorème suivant de Merkurjev et Suslin :

Théorème 1.2 (Merkurjev-Suslin)**.** *Pour tout corps K et l une puissance d'un nombre premier, la flèche « symbole modéré »*

$$K_2^M(K)/l \to H^2_{\acute{e}t}(K, \mu_l^2),$$

où K_2^M désigne la K-théorie de Milnor et le but désigne la cohomologie galoisienn du module Galoisien $\mu_l^2(\bar{K})$, est un isomorphisme.

La méthode de Bloch pour conclure consiste à démontrer le théorème de Merkurjev-Suslin (alors inconnu à l'époque des notes de Bloch) dans un cas particulier et à réduire le théorème précédent pour que ce cas soit suffisant.

Date: Octobre 2016.

1.1. **Réduction au cas des surfaces.**

1.3. On a déjà établi dans l'exposé précédent que l'application Θ_X est surjective. Il suffit donc de montrer que Θ_X est injective sur la partie de torsion de $\mathrm{CH}_0(X)$.

Suivant Bloch, on démontre le lemme suivant qui nous réduit au cas des surfaces.

Lemme 1.4. *Si l'application*

$$\Theta_X : A_0(X)_{tor} \to \mathrm{Alb}(X)_{tor}$$

est injective pour $\dim(X) = 2$*, alors elle est injective quelque soit* $\dim(X)$*.*

Démonstration. Considérons un k-schéma X projectif lisse tel que $\dim(X) > 2$ et un cycle de torsion $\delta \in CH_0(X)$. Il existe donc un entier $N > 0$ tel que

$$N.\delta \underset{\mathrm{rat}}{\sim} 0. \tag{1.4.a}$$

Cette relation implique qu'il existe des courbes irréductibles $C_i \subset X$ et des fonctions rationnelles non triviales $f_i \in \kappa(C_i)^\times$ telles que :

$$N.\delta = \sum_i \mathrm{div}_X(f_i). \tag{1.4.b}$$

Posons $C = \cup_i C_i$. Les groupes $CH_0(X)$ et $\mathrm{Alb}(X)$ sont des invariants birationnels en la variété projective lisse X. Quitte à remplacer X par une succession d'éclatements, on peut donc supposer que C est une courbe stable [1].

Alors, il existe une intersection complète $S \subset X$ lisse de dimension 2 contenant C. [2] Cela conclut car d'après le théorème de Lefschetz, l'image directe

$$i_* : \mathrm{Alb}(S) \to \mathrm{Alb}(X)$$

est un isomorphisme. □

1.2. **La conjecture de Milnor en dimension 2.**

Si le lemme de la section précédente est correcte, on est donc réduit à démontrer le théorème de Roitman 1.1 dans le cas où X est une surface. Rappelons aussi qu'on peut se limiter à la torsion annulée par une puissance ℓ^r d'un nombre premier différent de p.

On peut alors utiliser l'argument de l'exposé précédent, qui consiste à exploiter le morphisme des complexes de Gersten associée respectivement à la K-théorie et à la cohomologie étale modulo ℓ^r induit par le symbole modéré :

$$\sigma : K_2(K)/\ell^r \to H^2(K, \mu_{\ell^r}^2), \{x_1, x_2\} \mapsto x_1 \cup x_2$$

après identification de $K_1(K)/\ell^r = K^\times/\ell^r$ avec $H^1(K, \mu_{\ell^r})$, où K est un corps résiduel de X. Rappelons que l'analyse faite dans l'exposé précédent dans le cas $\dim(X) = 2$ montre qu'il suffit de montrer que ce symbole modéré est surjectif dans le cas où $K = \kappa(X)$. C'est ce que démontre Bloch dans [Blo10, Th. 5.7].

Théorème 1.5 (Bloch)**.** *Soit K/k une extension de type fini de k de degré de transcendance inférieure à 2.*

Alors, le symbole modéré σ est surjectif.

---

1. Autrement dit une réunion connexe de courbes lisses dont le lieu singulier n'est formé que de points doubles.
2. D'après une variante du théorème de Bertini, comme $\dim(X) > 2$ et C est une courbe stable, il existe une section hyperplane lisse Y de X contenant C. Si Y n'est pas de dimension 2, on peut alors itérer ce processus jusqu'à obtenir S.

Démonstration. Rappelons que K est de ℓ-dimension cohomologique 2 puisqu'il est de degré de transcendance 2 sur un corps algébriquement clos. En particulier, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_2(K) \arrow[r, "\times\ell"] \arrow[d, "\sigma"'] & K_2(K) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & K_2(K)/\ell \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
H^2(K,\mu_{\ell^{r-1}}) \arrow[r] & H^2(K,\mu_{\ell^r}) \arrow[r] & H^2(K,\mu_{\ell^r}) \arrow[r, "\beta"] & \underbrace{H^3(K,\mu_{\ell^{r-1}})}_{=0}.
\end{tikzcd}$$

On est donc réduit au cas $r = 1$.

Il existe un morphisme rationnel dominant $X \to \mathbb{P}^1$, dont la fibre générique X_η est une courbe sur $F = k(t)$. On considère une courbe affine géométriquement intègre $Y \subset X_\eta$ quelconque. Par construction, $\kappa(Y) = K$ et F est algébriquement clos dans K.

Soit j : $\mathrm{Spec}(()K) \to Y$ l'immersion du point générique de Y. Nous allons montrer l'inclusion :

$$\mathrm{Im}\big(j^* : H^2(Y,\mu_\ell) \to H^2(K,\mu_\ell)\big) \subset \mathrm{Im}\big(\sigma : K_2(K) \to H^2(K,\mu_\ell)\big). \qquad (1.5.a)$$

Cela conclut car Y peut-être remplacé par un ouvert affine non vide quelconque.

Soit F'/F une extension finie quelconque. On pose : $K' = F.K'$, $Y' = Y \otimes_F F'$. On obtient alors les diagramme commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
H^2(Y',\mu_\ell) \arrow[r, "j'^*"] \arrow[d, "\pi_*"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & H^2(K',\mu_\ell) \arrow[d, "\mathrm{Cor}_{F'/F}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & K_2(K') \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\mathrm{tr}_{F'/F}"] \\
H^2(Y,\mu_\ell) \arrow[r, "j^*"'] & H^2(K,\mu_\ell) & K_2(K) \arrow[l, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

où π_* à gauche est le morphisme trace en cohomologie étale, $\mathrm{Cor}_{F'/F}$ est le morphisme corestriction en cohomologie galoisienne, et $\mathrm{tr}_{F'/F}$ est le transfert en K-théorie de Milnor. D'après la définition de ce dernier (cf. Bass-Tate), le diagramme (2) est commutatif et il est classique que le diagramme (1) est commutatif (cf. [SGA4]).

Or le morphisme π_* est surjectif. En effet, il est induit par le morphisme trace suivant sur les faisceaux étales :

$$\tau_\pi : \mu_l \to \pi_*\pi^*(\mu_l) = \pi_(\mu_l).$$

Or, τ_π est un épimorphisme de faisceaux comme on le voit sur les fibres géométriques — en appliquant le fait qu'un schéma fini sur un schéma strictement local est une somme de copies de ce schéma strictement local. Ainsi, le fait que π_* est surjectif résulte du fait que, Y est de ℓ-dimension cohomologique 2, étant une courbe affine sur un corps de dimension cohomologique 1 (cf. [SGA4, XIV, 3.1]). Donc il suffit de montrer (1.5.a) pour Y' au lieu de Y, autrement dit on peut faire une extension finie quelconque de F.

Le groupe abélien $H^1(\bar{Y},\mu_\ell^2)$ est fini. Donc on peut trouver une extension finie F'/F telle que

(1) $Gal(\bar{F}/F')$ agit trivialement sur $H^1(\bar{Y},\mu_\ell^2)$,

(2) le morphisme d'extension des scalaires $H^1(Y',\mu_\ell^2) \xrightarrow{\varphi^*} H^1(\bar{Y},\mu_\ell^2)$ est un épimorphisme.

Quitte à remplacer F par F' en utilisant le principe du paragraphe précédent, on peut donc supposer que les conditions (1) et (2) ci-dessus sont satisfaites.

Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre, avec $\bar{Y} = Y \otimes_F \bar{F}$:

$$E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{Gal}}\big(K, H^q(\bar{Y}, \mu_\ell^2)\big) \Rightarrow H^{p+q}(Y, \mu_\ell^2)$$

Comme $\bar{Y}$ est une courbe affine sur un corps séparablement clos, la suite spectrale est concentrée sur la ligne $q = 1$ ou en $(p, q) = (0, 0)$. On en déduit en particulier :

$$H^2(Y, \mu_\ell^2) = H^1_{\mathrm{Gal}}\big(F, H^1(\bar{Y}, \mu_\ell^2)\big). \tag{1.5.b}$$

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^1(F,\mu_\ell) \otimes H^1(Y,\mu_\ell) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d] & H^2(Y,\mu_\ell^2) \arrow[d, "j^*"] & \\
H^1(F,\mu_\ell) \otimes H^1(K,\mu_\ell) \arrow[r] & H^2(K,\mu_\ell^2) & \\
& & K_2(K)/\ell \arrow[ul, "\sigma"'] \\
F^\times/\ell \otimes K^\times/\ell \arrow[r] \arrow[uu, "\sim"] & K^\times/\ell \otimes K^\times/\ell \arrow[uu] \arrow[ur, "symbol"'] &
\end{tikzcd}$$

où les deux premières flèches verticales sont données par le cup-produit.

Ainsi, pour montrer la relation (1.5.a), il suffit de montrer que la flèche (1) est surjective. Or,

$$H^2(Y, \mu_\ell^2) = H^1_{\mathrm{Gal}}\big(F, H^1(\bar{Y}, \mu_\ell^2)\big) = H^1(F, \mu_\ell) \otimes H^1(\bar{Y}, \mu_\ell)$$

d'après la relation (1.5.b) et l'hypothèse (1) faite ci-dessus. Via ces identifications, l'application (1) devient :

$$H^1(F, \mu_\ell) \otimes H^1(Y, \mu_\ell) \xrightarrow{1 \otimes \varphi^*} H^1(F, \mu_\ell) \otimes H^1(\bar{Y}, \mu_\ell)$$

qui est surjective d'après l'hypothèse (2) ci-dessus. □

2. Généralisations du théorème de Roitman

2.1. **p-torsion.** Based on results of Kato and on the proof of Bloch, Milne get the following result.

Théorème 2.1 (Milne, [Mil82]). *Soit X un schéma projectif lisse sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p.*

Alors, le morphisme canonique

$$\Theta_X : A_0(X)_p \to \mathrm{Alb}(X)_p$$

induit un isomorphisme.

En particulier, Θ_X est un isomorphisme sur les sous-groupes de torsion.

L'argument nouveau dans la preuve est d'utiliser la cohomologie syntomique de Fontaine-Messing, ou plutôt la version suivante :

$$\nu(r)_S := \mathrm{Ker}(C^{-1} - 1 : \Omega^r_S \to \Omega^r_S / d\Omega^{r-1}_S)$$

where C is the Cartier operator. Utilisant une variante de la preuve de Bloch obtenue par Kato, Milne prouve en particulier la proposition suivant (cf. [Mil82, 4.1]) :

Proposition 2.2 (Kato). *Let F be a finite type extension of a separably closed field k of transcendence degree 2. Then the symbol map*

$$d\log^2 : K_2(F) \to \nu(2)_F, \{x, y\} \mapsto d\log(x) \wedge d\log y$$

is surjective.

2.2. **Variétés ouvertes.**

2.3. I indicate the next generalization for completeness, but historically, it comes in fact after the development I will sketch in the next section.

In particular it uses Sulin homology groups. Recall that for an algebraic k-scheme X, one defines Suslin homology of X $H_*^{sing}(X)$ as the homology of the following explicit complex :

$$\dots c(\Delta^{n+1}, X) \xrightarrow{d_n} c(\Delta^n, X) \dots \to c(\Delta^1, X) \xrightarrow{d_0} c(\Delta^0, X)$$

where Δ^* is the standard [3] cosimplicial algebraic scheme over k, and when Y is a smooth scheme, $c(Y, X)$ denotes the group of finite correspondences from Y to X, that is the algebraic cycles of $Y \times X$ whose support is finite equidimensional over Y. Following Voevodsky, these correspondences can be composed as the usual formula makes sense without passing to rational equivalence ; moreover, for any morphism of smooth schemes $Y' \to Y$, one has a canonical base change map : $c(Y, X) \to c(Y', X)$. We use that functoriality with respect to face maps $\delta_i^n : \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ of the cosimplicial structure of Δ^*, to put :

$$d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i.(\delta_i^n)^*.$$

The groups $H_i^{sing}(X)$ are covariantly functorial in X with respect to proper maps and contravariantly functorial in X with respect to flat maps.

As an exercice, one can check that for any k-scheme X, the map :

$$c(\Delta^0, X) = Z_0(X) \to \mathbb{Z}, \sum_i n_i.x_i \mapsto \sum_i n_i.[\kappa(x_i) : k]$$

factors through the kernel of d_0 so induces a canonical map :

$$\deg_X : H_0^{sing}(X) \to \mathbb{Z}. \tag{2.3.a}$$

In fact, when X is proper (and still smooth) of dimension d, one deduces from classical theorems [4] in motivic homotopy theory :

$$H_i^{sing}(X) \simeq H_M^{2d-i,d}(X) = CH_0(X, i).$$

Besides, a careful check shows the degree map (2.3.a) coincides through the isomorphism $H_0^{sing}(X) \simeq CH_0(X)$ with the classical degree map.

So for any algebraic k-scheme X, we put :

$$H_0^{sing}(X)_0 = \mathrm{Ker}(\deg_X).$$

2.4. Recall for any smooth k-scheme with a rational point, Serre has defined in [Ser59] a semi-abelian variety denoted by $\mathrm{Alb}(X)$ (following a method of Rosenlicht). [5] It is equipped with a map $a_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$, and this map is the universal one to a commutative algebraic group is a suitable sense (see [Ram01]). One can check the map a_X induces a canonical morphism

$$\Theta_X : H_0^{sing}(X)_0 \to \mathrm{Alb}(X).$$

The main theorem of [SS03] is the following one :

3. Δ^n is the spectrum of $k[x_0, \dots, x_n]/(\sum_i x_1 - 1)$;

4. The projective case is due to Voevodsky at least under the resolution of singularities ; the general case without assuming resolution of singularities follows from a duality argument using the ssix functors formalism ; of course the last assertion is Voevodsky's theorem [Voe02] ;

5. See also [Ram01] for the construction when X has not necessarily a rational point. See finally [BVK16] for a general construction for any k-schemes, in terms of motivic complexes.

Théorème 2.5. *Let k be an algebraically closed field of caracteristic exponent p and X be a smooth k-scheme which admits a smooth projective connected compactification.*

Then the morphism Θ_X defined above is an isomorphism on prime to p torsion.

The key point of the theorem is the following isomorphism [6] of Suslin and Voevodsky (see [SV96, 7.8] in characteristic 0, and [Kel14] in characteristic $p > 0$) :

$$H_i^{sing}(X, \mathbb{Z}/n) \simeq \mathrm{Hom}\left(H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}/n), \mathbb{Z}/n\right).$$

The technical point is the following check [SS03, 5.1].

Lemme 2.6. *The following diagram is commutative :*

$$\begin{tikzcd} H_1^{sing}(X, \mathbb{Z}/n) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\sim"'] & H_0^{sing}(X)_n \arrow[d, "\Theta_X"] \\ \mathrm{Hom}\left(H^1_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}/n), \mathbb{Z}/n\right) \arrow[r, "(2)"] & \mathrm{Alb}(X)_n \end{tikzcd}$$

where the left vertical map is the previous isomorphism, the upper horizontal map is induced by the obvious boundary map (so in particular it is surjective) and the lower horizontal map is the map constructed in our preceding lecture. [7]

Then we can conclude as follows. We take the colimit of the previous diagrams over the integer $n = \ell^r$ for a prime $\ell \neq p$ so we get a commutative diagram :

$$\begin{tikzcd} \left[\varinjlim_r H_1^{sing}(X, \mathbb{Z}/\ell^r)\right] \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "\sim"'] & H_0^{sing}(X)_{\ell-tor} \arrow[d, "\Theta_X"] \\ \mathrm{Hom}\left(H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) \arrow[r, "(2)"] & \mathrm{Alb}(X)_{\ell-tor} \end{tikzcd}$$

From the preceding discussion, left vertical map is still an isomorphism, the map (1) is surjective while the map (2) becomes an isomorphism (see again the preceding lecture). Thus (1) is in fact an isomorphism and this show Θ_X is an isomorphism on torsion kills by a power of ℓ. This is sufficient to conclude.

Références

[Blo10] Spencer Bloch. *Lectures on algebraic cycles*, volume 16 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2010.

[BVK16] L. Barbieri-Viale and B. Kahn. On the derived category of 1-motives. *Astérisque*, (381) :xi+254, 2016.

[Kel14] S. Kelly. Un isomorphisme de suslin. arXiv :1407.5772, 2014.

[Mil82] J. S. Milne. Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic : Rojtman's theorem. *Compositio Math.*, 47(3) :271–287, 1982.

[Ram01] N. Ramachandran. Duality of Albanese and Picard 1-motives. *K-Theory*, 22(3) :271–301, 2001.

[Ser59] J.-P. Serre. Morphismes universels et variétés d' albanese. Séminaire Chevalley, exposé 11, année 58/59.

[SGA4] A. Grothendieck et al. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1972–1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois–Marie 1963–64 (SGA 4).

6. In fact, this isomorphism is an extension of the rigidity theorems that will be presented in the next section.

7. Using the fact : $H^1_{\text{ét}}(X, \mu_n) \simeq \mathrm{Pic}(X)_n$.

[SS03] M. Spießand T. Szamuely. On the Albanese map for smooth quasi-projective varieties. *Math. Ann.*, 325(1) :1–17, 2003.

[SV96] A. Suslin and V. Voevodsky. Singular homology of abstract algebraic varieties. *Invent. Math.*, 123(1) :61–94, 1996.

[Voe02] V. Voevodsky. Motivic cohomology groups are isomorphic to higher chow groups in any characteristic. *Int. Math. Res. Not.*, 7 :351–355, 2002.